2 千變萬化的不等式

不等式問題常讓人有驚奇，摸不著邊，不知從何而降的感覺。大概是因為只看到漂亮的不等式，卻無從洞察製造這不等式的數學在哪兒（見樹不見林)。事實上，不等式問題經常是由幾何圖形或具有特殊性質的函數或生活中的模具所產生的。如何看穿這背後的黑手-圖形或函數或模具，是探索不等式問題的重點。

在這裡，我們提供了兩則可以多面向思維的不等式問題。當然也了提供了從各種不同的角度切入所得到的證明。這些證明讓不等式問題應驗了蘇東坡的名句

“橫看成嶺、側成峰，高低遠近、各不同”。

2.1 條條道路通羅馬的不等式

定理 2.1 設實數 a_1, a_2, b_1, b_2 滿足 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2 > 0$ 及 $a_1 a_2 \ge b_1 b_2$。試證明：不等式 $a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2$ 成立。

【證法 1】(數線思維）由 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2$ 得到

$$(a_1 - a_2)^2 \ge (b_1 - b_2)^2 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \ge b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2^2.$$

再與不等式 $4a_1 a_2 \ge 4b_1 b_2$ 相加，得到

$$a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \ge b_1^2 + 2b_1 b_2 + b_2^2 \Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \ge (b_1 + b_2)^2.$$

因為 $a_1 + a_2 > 0,\ b_1 + b_2 > 0$，所以 $a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2$。

【證法 2】(數線思維）由 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2 > 0$ 得到

$\sqrt{a_1} \ge \sqrt{b_1} \ge \sqrt{b_2} \ge \sqrt{a_2} > 0 \Rightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \ge (\sqrt{b_1} - \sqrt{b_2})^2$

利用 $a_1 a_2 \ge b_1 b_2 > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) \ge 2(\sqrt{a_1 a_2} - \sqrt{b_1 b_2}) \ge 0 \\ &\Rightarrow a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2. \end{aligned}$$

【證法 3】（分數思維）由 $a_1a_2 \ge b_1b_2 > 0$ 得到

$$\frac{a_1}{b_1} \ge \frac{b_2}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} - 1 \ge \frac{b_2}{a_2} - 1$$
$$\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_1} \ge \frac{b_2 - a_2}{a_2}$$

利用 $b_1 \ge a_2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{a_1 - b_1}{b_2 - a_2} \ge \frac{b_1}{a_2} \ge 1$$

利用 $a_1 - b_1 \ge 0, b_2 - a_2 \ge 0$

$$\Rightarrow a_1 - b_1 \ge b_2 - a_2$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2.$$

【證法 4】（代數思維）設

$$\begin{cases} x = a_1 - b_1 \ge 0, \\ y = b_2 - a_2 \ge 0. \end{cases}$$

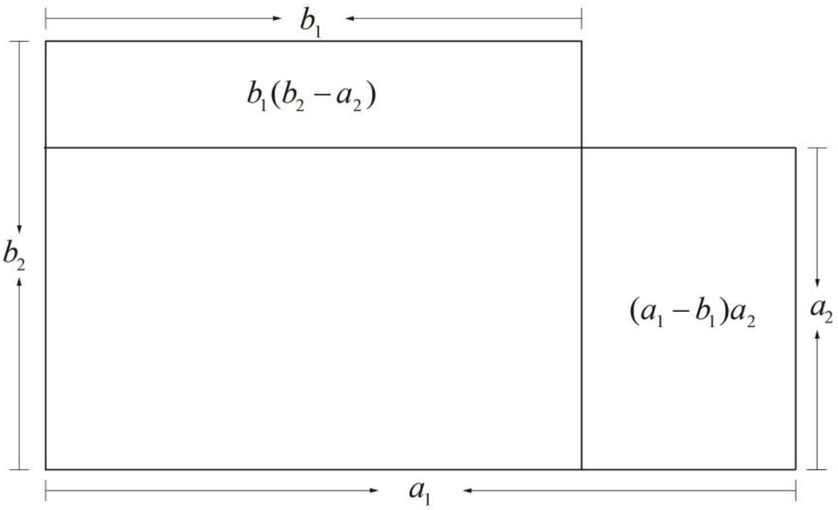
由 $a_1a_2 \ge b_1b_2$ 推得

$$(b_1 + x)(b_2 - y) \ge b_1b_2 \Rightarrow xb_2 - yb_1 \ge xy \ge 0$$
$$\Rightarrow xb_2 \ge yb_1$$

利用 $b_1 \ge b_2 > 0$

$$\Rightarrow x \ge y$$
$$\Rightarrow a_1 - b_1 \ge b_2 - a_2$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2.$$

【證法 5】（幾何思維）考慮下圖：



由面積不等式 $a_1a_2 \ge b_1b_2$ 推得另一面積不等式

$$
\begin{aligned}
(a_1-b_1)a_2 \ge b_1(b_2-a_2) &\Rightarrow \frac{a_1-b_1}{b_2-a_2} \ge \frac{b_1}{a_2} \ge 1 \\
&\Rightarrow a_1-b_1 \ge b_2-a_2 \\
&\Rightarrow a_1+a_2 \ge b_1+b_2.
\end{aligned}
$$

【證法 6】（反證法）假設 $a_1+a_2 < b_1+b_2$。

因為

$$a_1^2+2a_1a_2+a_2^2=(a_1+a_2)^2<(b_1+b_2)^2=b_1^2+2b_1b_2+b_2^2,$$

所以

$$0 \le 2(a_1a_2-b_1b_2) < b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2 \tag{2.1}$$

另一方面，由 $a_1 \ge b_1 \ge b_2 \ge a_2$ 得到 $(a_1-a_2)^2 \ge (b_1-b_2)^2$，即

$$a_1^2+a_2^2-2a_1a_2 \ge b_1^2+b_2^2-2b_1b_2.$$

利用 $a_1a_2 \ge b_1b_2$ 推得

$$b_1^2+b_2^2-a_1^2-a_2^2 \le -2(a_1a_2-b_1b_2) \le 0. \tag{2.2}$$

因為式子(2.1) 與(2.2) 矛盾，所以假設錯誤，必需 $a_1+a_2 \ge b_1+b_2$。

2.2 不知如何下手的不等式

定理 2.2 設 p,q,r 是三個滿足

$$0<p,q,r<1$$

的實數。證明： $pq+qr+rp-2pqr<1.$

【代數-幾何思維】令直線方程式為 $y=f(x)\ =\ (p+q-2pq)x+pq-1$（將 $p,\ q$ 視為固定的實數）。將 $x=\ 0,1$ 代入，得到

$$f\left(0\right)\ =pq-1<0;\ \ f\left(1\right)=p+q-pq-1\ =-(p-1)(q-1)<0,$$

所以此直線在 $[0,1]$ 區間的值恆為負數，因此

$$f(r)=pq+qr+rp-2pqr-1<0.$$

得證。

【不等式思維】

$$\begin{aligned}&1-(pq+qr+rp-2pqr)\\&\quad=\ (1-pq-r+pqr)\ +r(-q-p+pq+\ 1)\\&\quad=\ (1-pq)(1-r)\ +r(1-p)(1-q)>0.\end{aligned}$$

【幾何模型思維】將原來不等式重新詮釋如下：

$$p\cdot q\cdot 1+1\cdot q\cdot r+p\cdot 1\cdot r-2p\cdot q\cdot r\ <1\cdot 1\cdot 1.$$

幾何模型解釋如下：將

$1\cdot 1\cdot 1$ 　視為 $X,\ Y,Z$ 軸正向上各取 1 單位所成正立方體的體積；

$p\cdot q\cdot 1$ 　代表 $X,\ Y,Z$ 軸正向上各取 $p,\ q,1$ 單位之長方體的體積；

$1\cdot q\cdot r$ 　代表 $X,\ Y,Z$ 軸正向上各取 $1,\ q,\ r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot 1\cdot r$ 　代表 $X,\ Y,Z$ 軸正向上各取 $p,1,\ r$ 單位之長方體的體積；

$p\cdot q\cdot r$ 　代表 $X,\ Y,Z$ 軸正向上各取 $p,\ q,\ r$ 單位之長方體的體積。

你是否感受到這種幾何模型思維的功力了。

【推廣、提出猜想思維】本題目是一則三維度的不等式（因為含有 $p,\ q,\ r$ 三個未知數）。照理說，每個維度都應有對應的不等式存在才是，所以我們提出最一般化的猜想如下：

設實數 $a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n$ 滿足

$$0 < a_1,\ a_2,\cdots,\ a_n < 1.$$

試證明：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_i}-(n-1)a_1a_2\cdots a_n<1. \tag{2.3}$$

讀者應該容易利用數學歸納法證明這個猜想吧！

2.3 蹺蹺板啟示錄

阿基米德知名的力矩原理是說：如果將一個物體置於槓桿臂上，它會繞著槓桿支點產生力矩，相當於物體的重量乘上它與支點的距離。這原理告訴我們越重的物體離支點越遠時，所產生的力矩越大。

我們就以如下的蹺蹺板做例子，

習題 2.1　設實數 a,b,c 滿足 $0<a<b<c<1$。問長度為

$$\frac{c-a}{1-ca},\frac{b-a}{1-ab},\frac{c-b}{1-cb}$$

的三條線段是否可以構成一個三角形的三邊邊長？

動手玩數學

設實數 a,b 滿足 $-1\le b\le a\le 1$。你能比較

$$\frac{\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}}{2} \text{ 與 } \sqrt{1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

的大小關係嗎？

挑戰題

如下圖，正方形Ⅰ與正方形Ⅱ的面積和為 1。試證明：剛好包住正方形Ⅰ與Ⅱ的矩形之面積

$$\leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$